

UNITED WISDOM

Математика открывает мир или создаёт язык для него

Мир и сознание

Andrey Zarinsh & Maria Evilkut

W29 · RU

@andrey.zarinsh @ilkutki

Математика открывает мир или создаёт язык для него

Эпиграф

> *«геометрия направит душу к истине»*

Платон, «Государство», книга VII, предложение «Then, my noble friend…», внутренняя клауза. Собственный перевод с английского перевода Бенджамина Джоуэтта; не перевод с греческого.

О чём эта статья

Когда двенадцать камней пересчитывают по одному, результат кажется свойством самих камней. Когда число двенадцать записывают знаками XII, становится заметен человеческий выбор обозначения. Когда доказывают теорему о фигуре, которую невозможно начертить совершенно точно, возникает третий вопрос: что именно здесь открыто? Спор об открытии и изобретении математики соединяет разные задачи, поэтому один ответ легко оказывается слишком широким. Мы сопоставим три философские позиции на сложении, единице, окружности, геометрическом доказательстве и применении формулы. Платон связывает математическое знание с обращением к умопостигаемому; Кант объясняет его через построение в чистом созерцании; Милль ищет основания в опыте и отличает вывод из предпосылок от истинности самих предпосылок. Эти позиции не складываются в общую доктрину. Их разногласия помогают точнее видеть, где мы выбираем язык, где получаем обязательное следствие, а где проверяем соответствие выбранного описания конкретному миру. Для этого не требуется сначала решить все вопросы о существовании математических объектов.

@andrey.zarinsh @ilkutki

I. Четыре вопроса внутри одного спора

Представим мастерскую, где лежат семь одинаково учтённых деталей и ещё пять. Работник может пересчитать все детали, написать сумму или занести результат в таблицу. Эти действия дают число двенадцать, если группы не пересекаются и за время подсчёта состав не меняется. Однако вопросы к результату различны. Кто придумал знаки для чисел? Почему именно такое сложение даёт такой ответ? Существовал ли ответ до появления человека? Почему этим вычислением можно пользоваться в мастерской? Последний вопрос касается условий применения, второй — обоснования перехода, первый — устройства записи, третий — существования объектов. Решение одного вопроса ещё не решает остальных. Даже хорошее объяснение происхождения обозначений может совсем не объяснять необходимость математического вывода.

В обычной речи открытием называют нахождение того, что не зависит от желания нашедшего. Изобретением называют создание инструмента или способа действия. Эти значения полезны, пока их не превращают в жёсткую классификацию каждой стороны математики. Можно изобрести обозначение, которое позволит обнаружить ранее незамеченную связь. Можно выбрать правила игры, а затем узнать, что определённая позиция при этих правилах недостижима. Самостоятельный выбор исходной системы не означает возможности выбирать любой её результат. С другой стороны, сопротивление результата нашему желанию ещё не доказывает, что все математические объекты существуют отдельно от мышления. Оно устанавливает более скромное обстоятельство: данный переход ограничен условиями и отношениями, которые нельзя изменить одним пожеланием.

Поэтому полезно различать запись, объект рассмотрения, способ доказательства и область применения. В мастерской записью будет 7 + 5; объектом могут быть численности двух непересекающихся групп; проверяемым переходом — получение общей численности; областью применения — конкретный учёт деталей. Если одну деталь включили в обе группы, математическое равенство не стало ложным: изменилось соответствие описания ситуации предпосылкам подсчёта. Если запись заменили римскими знаками, изменился язык. Если спросили, почему сложение вообще имеет обязательные свойства, начался философский спор. Такая предварительная разметка не решает его за участников, но не позволяет случайно подменить рассуждение о существовании чисел спором о том, какие знаки удобнее печатать в ведомости.

II. Платон: число ведёт за пределы видимого

В книге VII «Государства» разговор о математике включён в обсуждение образования стражей и философов. Арифметика имеет военное применение, но Платон через речь Сократа не ограничивает её расстановкой войск и торговым расчётом. Важнее способность обращаться от изменяющегося к тому, что мысль рассматривает как устойчивое. Видимые предметы могут давать противоречивые впечатления: один палец велик относительно другого и мал относительно третьего. Такое затруднение побуждает различать отношения и спрашивать, что значит величина или единство. Это философское описание перехода к размышлению, а не современный эксперимент о работе мозга. Его задача — объяснить, почему арифметика занимает место в определённом замысле образования и познания.

Особенно существенен разговор о единицах, равных, неизменных и неделимых в рассматриваемом расчёте. Собеседники относят такие числа к тому, что постигается мыслью. Камень можно расколоть; нарисованная точка имеет толщину; краска может осыпаться. Но эти изменения не обязаны менять предмет доказательства, если камень или знак только представляют единицу. Представим две нарисованные группы точек: одна крупная, другая мелкая. Если речь о количестве точек, увеличение размера не прибавляет новую точку. Рассуждение удерживает одно отношение и отвлекается от другого. Платоновское понимание идёт дальше этого простого приёма: математическая направленность мысли связана у него с истинным бытием. Наш пример показывает различение, но сам по себе не доказывает эту более сильную философскую позицию.

Геометрия в том же диалоге должна вести к знанию устойчивого, а не только помогать разбивать лагерь. Обычные слова геометра о построении и приложении фигуры подвергаются критике, когда практическое действие заслоняет предмет знания. Здесь важно не сделать обратную подмену: Платон признаёт практическую пользу, но считает её недостаточным основанием высшей ценности занятия. Нельзя также переносить его утверждения о быстроте обученных людей в сегодняшнее обещание, что изучение геометрии гарантированно улучшит все способности. Для нашей темы существенна сама ориентация: математик, согласно этой позиции, не просто составляет удобный словарь видимых вещей. Он учится различать предметы мысли, которые не исчерпываются изменением нарисованных фигур или использованием чисел на рынке.

III. Кант: построить больше, чем разобрать понятие

В «Пролегоменах» Кант различает суждение, разъясняющее уже мыслимое в понятии, и суждение, расширяющее знание. Его пример 7 + 5 = 12 должен показать, что понятие соединения семи и пяти ещё не содержит явно полученного числа двенадцать. Для получения суммы требуется выполнить построение: последовательно присоединить единицы. Кант упоминает пальцы и точки как помощь для представления операции. Но считать это простым тезисом о том, что арифметика выводится из наблюдения пальцев, означало бы изменить его аргумент. Он спрашивает об основании необходимого математического знания и связывает его с чистым созерцанием. Показательный предмет помогает изложить построение; философское основание, которое Кант предлагает для него, не сводится к успешной серии наблюдений.

Слово «созерцание» здесь требует внимания. В английском носителе, изданном Полом Карусом, используются intuition и пояснения через визуальное представление. В этом контексте речь не о предчувствии ответа и не о личной уверенности. Кант обсуждает способ непосредственного представления и формы чувственности, прежде всего пространство и время. Арифметическое присоединение единиц связано у него с последовательностью во времени, геометрическое построение — с пространством. Можно не принимать такое объяснение и всё же не заменять его тезисом «математику каждый чувствует по-своему». Чистое созерцание в кантовском аргументе должно объяснить возможность общезначимого знания, а не разрешить частные результаты для каждого человека. Именно предполагаемая необходимость отличает этот вопрос от исследования индивидуальных привычек счёта.

Этот подход не совпадает с платоновским обращением к истинному бытию. Кант связывает доступность предметов с условиями их явления нам и отличает явление от вещи самой по себе. Однако он также отвергает вывод, будто геометрия есть произвольное поэтическое сочинение. Его решение должно одновременно объяснить, почему знание не извлекается только из разобранных понятий и почему оно имеет объективную силу для предметов чувств. В статье мы удерживаем этот замысел как конкретную философскую позицию. Мы не приписываем ей подтверждение сегодняшними исследованиями восприятия и не считаем, что один школьный рисунок доказал её полностью. Следующий шаг сравнения — спросить, как ту же устойчивость математического вывода объясняет мыслитель, который переносит основание знания к опыту.

IV. Милль: за знаками стоят отношения вещей

Во второй книге «Системы логики», главе VI, Милль рассматривает арифметику как трудный случай для своего объяснения дедуктивных наук. Он отвергает представление, будто утверждение о двух и одном всего лишь сообщает, что люди условились употреблять слово «три». Два камня рядом с одним и те же камни, собранные вместе, имеют одинаковый состав, но представлены в разных отношениях. Возможность разделять и перегруппировывать совокупность, по Миллю, узнаётся в опыте. Основания арифметики он считает обобщениями такого опыта. Это спорная философская аргументация, а не современное измерение того, как дети усваивают число. Его исторические утверждения о методах обучения не нужны нам как доказательство эффективности какого-либо нынешнего педагогического приёма.

Милль замечает и другую особенность: во время длинного алгебраического расчёта человек может оперировать буквами, не удерживая перед глазами конкретные предметы. В начале задача переводится в знаки; в конце результат возвращается к предметам. Это способ облегчить промежуточную работу, но для Милля он не превращает вывод в чистое переименование. Буква может представлять разные величины, и общий характер записи позволяет отвлечься от частного образа. Само отношение, утверждает он, касается вещей. Поэтому назвать Милля сторонником взгляда «математика лишь созданный язык» было бы неверно. Он обсуждает, почему язык способен нести вывод, и ищет его доказательную силу за пределами одних начертаний. Его ответ существенно отличается от кантовского основания необходимости, хотя оба не удовлетворяются простым соглашением о словах.

Возьмём собственную условную задачу: есть две коробки с одинаковым количеством жетонов, и в каждую добавляют по три жетона. Алгебраическая запись позволяет говорить о любом исходном числе, а не перечислять отдельно десять, двадцать или тридцать случаев. На промежуточном шаге жетоны не обязательно воображать. Но для применения результата важны исходное равенство и одинаковое добавление. Милль объяснял бы основания такого перехода через обобщённый опыт отношений вещей; Кант искал бы основание необходимого математического суждения иначе. Сама успешность этой короткой записи не выбирает победителя в споре. Она показывает, что общие знаки сохраняют определённую структуру задачи. Философам ещё предстоит объяснить, откуда берётся правомерность этой структуры и почему мы уверены в соответствующем переходе.

V. Что остаётся после смены обозначения

Сравним записи 12 и XII. Они различаются устройством, привычностью и удобством для разных операций. Если их используют для одного и того же количества в оговорённых системах обозначения, замена записи не меняет количества. Это простая причина не отождествлять число с его видимым знаком. Можно также назвать неизвестное количество буквой a, а потом заменить её буквой n. Пока значения и правила сохраняются, многие преобразования не меняют содержания. Здесь человеческое решение действительно заметно: мы выбираем символ, расположение элементов и способ представления. Однако факт выбора не означает, что после него любой ответ станет допустим. Двум системам обозначения одного отношения нужно обеспечить согласованный переход, иначе они перестанут описывать одно и то же.

Пусть условная задача требует распределить двенадцать отдельных жетонов между тремя людьми поровну, без остатка. Запись результата может измениться, но при этих условиях каждому достанется четыре. Если автор новой нотации запишет для каждого пять, его система должна объяснить, куда делись условия задачи или откуда появились дополнительные жетоны. Переименование не создаёт их. В этом смысле математическая работа обнаруживает ограничения даже там, где её язык разработан людьми. Такие ограничения могут относиться к выбранным определениям и правилам; утверждение об их отдельном вечном существовании требует дополнительного аргумента. Важно не выдать более сильную метафизическую позицию за прямое следствие того, что ошибочная запись не выдержала проверки. Независимость вывода от желания имеет несколько возможных философских объяснений.

С другой стороны, хороший язык делает различия заметными. Если вместо общей цифры в отчёте указать отдельно число уникальных деталей и число записей о деталях, станет видна возможная двойная регистрация. Это не открытие нового арифметического закона, а более точный выбор объекта счёта. Однако изменение языка может привести к открытию ошибки в представлении ситуации. Поэтому создание и обнаружение способны участвовать в одной работе. Мы создаём способ задавать вопрос, затем встречаем отношение, которое не произвольно задаёт ответ. Такое описание рабочего процесса не заменяет платоновской, кантовской или миллевской философии оснований. Оно помогает читателю не требовать от одного слова «изобретение» объяснения сразу всех элементов математической деятельности, от формы шрифта до обязательности следствия.

VI. Почему пересчёт проверяет применение, а не всю философию

Вернёмся к двум спискам из семи и пяти деталей. Если в обоих есть одна и та же деталь, число различных деталей равно одиннадцати. Двенадцать будет числом записей, если каждую запись считают отдельно. У нас нет двух противоречащих математик: есть два объекта подсчёта. Вычитание повторного включения требует заметить пересечение списков. Условный пример показывает, как математический переход связан с описанием ситуации. Проверяющий может пересчитать реальные детали, сравнить идентификаторы или открыть карточки учёта. Эти действия дадут свидетельства о том, соответствует ли исходное описание фактическому составу. Они не дадут автоматически ответа на вопрос, существуют ли числа вне человеческого мышления. Проверка приложения и философское обоснование числовых отношений остаются разными задачами.

Милль специально различает чистое количество объектов и равенство по какому-то другому свойству. Можно сосчитать трёх людей, не предполагая одинаковый рост или силу. Но если количество используют как точный показатель общего веса, нужны сведения о весе учитываемых единиц. Собственный пример прост: две посылки составляют две посылки, хотя одна весит один килограмм, другая — девять. Их средний вес равен пяти килограммам, но нельзя получить общий вес, умножив число посылок на вес первой. Ошибка возникает в добавленном предположении об одинаковом весе. Математические действия можно выполнить безупречно и всё же неверно описать предмет. Поэтому проверять следует и вычисление, и связь между единицей счёта и тем свойством, ради которого этот счёт проводится.

Есть и временное условие. Если в мастерской за время пересчёта забрали деталь и привезли новую, результат должен быть привязан к моменту или процедуре учёта. Условная формула может описывать постоянный состав, тогда как ситуация меняется. Исправление модели не означает, что арифметика перестала действовать; в модель требуется включить поступления, изъятия или согласованный временной срез. Этот пример не доказывает миллевскую теорию происхождения математических оснований. Он поддерживает более узкий практический вывод: физическая применимость зависит от того, что представлено единицей, какие различия исключены и какие изменения допускаются. Платоновский интерес к устойчивому предмету мысли и кантовский вопрос о необходимых условиях познания сохраняют самостоятельное значение даже после очень успешной проверки конкретной ведомости.

VII. Окружность и след карандаша

Рассмотрим окружность как множество точек плоскости на одном расстоянии от выбранного центра. След карандаша имеет толщину, а измерения зависят от разрешения инструмента. Из этого не следует, что геометрический предмет пуст: его свойства заданы точнее, чем свойства любого конкретного следа. Но также не следует, что всякий круглый предмет точно осуществляет рассматриваемое определение. Можно построить геометрическое рассуждение об идеальной окружности и отдельно решить, насколько такая модель подходит к ободу колеса. Тогда работа распределяется между доказательством и измерением. Первое устанавливает отношение при заданных условиях; второе исследует конкретный предмет и пределы точности. Без этого различения спор легко превращается в выбор между безупречностью чертежа и бессмысленностью всей геометрии.

Платоновский текст направляет внимание к предмету знания, который не исчерпывается практическим черчением. Кант объясняет возможность геометрии через построение в чистом созерцании и связь пространственной формы с явлениями. Милль, напротив, обсуждает гипотетический характер выделения одних свойств предмета при отвлечении от других. У него вывод может быть надёжен относительно предпосылок, хотя применение требует оценки их приближения к конкретной ситуации. Один рисунок с неровным краем не опровергает все три позиции и не делает их одинаковыми. Он ставит перед ними общий материал, но ответы касаются разных оснований. Платон акцентирует направление познания, Кант — условие необходимого знания, Милль — опытное основание и отделение вывода от точности его предпосылок.

Попробуем поставить вопрос иначе: что именно мы узнали, когда доказали свойство окружности? Если утверждение относится к объекту, определённому математически, новая связь может быть обязательной внутри принятого рассмотрения. Если затем она помогает понять изготовленный обод, добавляется проверка представления физического предмета. Человеческий выбор определения не позволяет по желанию изменить доказанное отношение, сохраняя те же предпосылки. Физический успех применения, в свою очередь, не доказывает автоматически, что именно эта философия математических объектов истинна. Он показывает плодотворность определённого описания в исследуемых условиях. Такой ответ оставляет место и созданию средств мысли, и обнаружению следствий, и изучению мира. Эти три действия имеют разные требования к проверке, хотя в работе одного человека часто выполняются вместе.

VIII. Два треугольника и условие пространства

На плоскости в евклидовом рассмотрении сумма внутренних углов треугольника равна ста восьмидесяти градусам. Чтобы увидеть роль предпосылок без ссылки на измерение настоящей Земли, возьмём математическую сферу. Соединим северный полюс с двумя точками экватора по меридианам, расходящимся на девяносто градусов, и эти точки — четвертью экватора. В вершине у полюса угол прямой по выбору меридианов; у двух экваториальных вершин меридианы также пересекают экватор под прямым углом. Получается сферический треугольник с тремя прямыми углами, суммой двести семьдесят градусов. Это наш элементарный модельный пример. Он не описывает погрешности географической съёмки и не является сообщением о том, что какой-то измеренный треугольник опроверг школьную арифметику или изменил значение девяноста градусов.

В разных рассмотрениях различается то, что считается стороной, кратчайшей линией и пространством фигуры. Если сохранить все условия одного доказательства, результат нельзя заменить желаемым. Если перейти к другим условиям, полученное утверждение надо формулировать заново. Поэтому математическая свобода выбора предмета совместима со строгими ограничениями на выводы. Этот пример заставляет внимательнее обращаться и с историческими объяснениями геометрической необходимости. Кант в прочитанном тексте выдвигает сильные утверждения о пространстве как форме чувственности. Мы не превращаем их в описание всех возможных математических пространств и не приписываем ему нашу сферическую конструкцию как ответ на современный спор. Достаточно заметить, что область и смысл геометрического утверждения должны быть названы до философского обобщения.

Можно ли отсюда заключить, что люди изобрели пространство? Нет: построение математического описания не равнозначно созданию физического предмета. Можно ли заключить, что любое выбранное описание одинаково подходит к природе? Тоже нет: соответствие исследуют отдельно. Наконец, различие двух пространственных моделей не означает, что доказательство стало вопросом вкуса. В каждой модели требуется последовательное рассуждение из её условий. Мы получили полезный способ уточнять спор: выбор исходного рассмотрения, строгость вывода и физическая применимость не должны конкурировать за одно название. Доказательство о сфере устанавливает отношение в принятом объекте; выбор этого объекта для задачи навигации потребовал бы иных сведений. Такие сведения в нашем условном примере не исследованы, поэтому он завершён именно как пример различения предпосылок.

IX. Модель мира и успешный расчёт

Представим прямоугольный участок с точно заданными в условной задаче сторонами десять и двенадцать метров. Площадь модели равна ста двадцати квадратным метрам. Реальный участок может иметь неровные границы, а размеры — измеряться с ограниченной точностью. Полезность формулы не отменяет этих обстоятельств. Можно уточнить границу, разбить фигуру на части, оценить погрешность и решить, достаточно ли результата для конкретной цели. Это уже работа с описанием и данными. Математическая связь в прямоугольной модели не становится менее обязательной от того, что реальный забор кривой. Однако уверенность в формуле не должна превращаться в уверенность, что каждый участок прямоуголен. Хорошее применение сохраняет обе стороны: ясность вывода и ответственность за выбор представления.

Подобный опыт помогает сравнить два смысла слова «объективность». В одном случае речь о независимости правильно выведенного результата от желания вычисляющего. В другом — о способности описания выдерживать сопоставление с конкретными предметами и процедурами измерения. Они связаны, но не тождественны. Можно строго вывести следствие из неверного предположения о форме участка. Можно получить близкую площадь случайным грубым подсчётом, не умея обосновать способ. В первом случае недостаточны данные или модель; во втором недостаточно понимание вывода. Философские позиции Платона, Канта и Милля ставят ещё более глубокий вопрос об основании математической общезначимости. Его нельзя закрыть одним удачным хозяйственным расчётом, хотя применение даёт важный материал для обсуждения связи знания и мира.

Итак, вопрос об открытии имеет несколько возможных объектов. Мы можем обнаружить следствие выбранных правил, ранее не замеченную структуру задачи или соответствие модели явлению. Вопрос о создании также неоднороден: создают обозначение, определение, постановку задачи, процедуру построения. Участие человека не позволяет объявить все результаты произвольными; устойчивость результатов не позволяет объявить все способы представления данными без выбора. Более зрелое обсуждение начинается с конкретного примера и указания, какая сторона требует объяснения. Оно может закончиться настоящим разногласием о природе математических объектов. Такое разногласие ценнее искусственного согласия, в котором Платон, Кант и Милль будто бы одинаково говорят, что «всё есть числа». В прочитанных местах они предлагают разные основания и разные направления дальнейшего вопроса.

X. Свобода вопроса и дисциплина ответа

Человеческая творческая роль в математике хорошо видна при постановке задачи. Можно спросить о количестве предметов, их порядке, расстоянии между ними или возможности распределения. Один набор жетонов допускает все эти вопросы, но ответы имеют разный предмет. Выбрав отношение, мы учимся удерживать его, не подменяя другими. Здесь полезна платоновская настойчивость в отношении предмета мысли: знание требует большего, чем заметный знак или непосредственная польза. Полезен и кантовский вопрос о том, каким действием представления получается новое суждение, а не просто разъясняются слова. Наконец, миллевское возвращение от символов к вещам напоминает проверить, что результат действительно относится к исходной задаче. Эти полезные вопросы не делают философские основания трёх авторов совместимыми.

На практике можно отдельно записать решение и его область. Например: «двенадцать жетонов распределяются по четыре между тремя участниками, если деление равное, жетоны отдельные и все должны быть распределены». Затем задать иной вопрос: обязательно ли именно равное распределение? Математика первого решения не устанавливает справедливость выбранного правила. Если задача касается людей, порядок деления может зависеть от договорённости, нужды или обязательства. Их обсуждение требует собственных оснований. Это не недостаток расчёта: он ясно показывает последствия одного условия. Не стоит требовать от числового отношения ответа на вопрос, который мы не включили в рассмотрение. Разделение этих задач помогает пользоваться математикой без превращения её точности в оправдание любого выбранного решения.

Поэтому ответ на вопрос заголовка разумно искать по частям. Язык математического описания разрабатывается людьми. Следствия требуют открытия и доказательства, поскольку не становятся любыми по желанию. Применение к миру требует определения предмета и проверки условий. А спор об основании необходимого знания и существовании математических объектов остаётся философским. Наши примеры дают средства для его постановки, но не устраняют разногласия источников. Читатель может предпочесть одну позицию, увидев, какую трудность она объясняет и какую оставляет. При этом сохраняется рабочая дисциплина: явно назвать единицу, отношение, предпосылки и способ проверки. Такое умение позволяет менять представление, когда задача этого требует, и удерживать обязательность вывода там, где условия уже определены и действительно соблюдены.

Что это значит на практике

Выберите небольшой расчёт, который вам действительно нужен: число уникальных вещей в двух списках, распределение времени или площадь условного прямоугольника. Сначала запишите вопрос словами. Назовите, что считается единицей, какой момент или состав учитывается и нет ли повторного включения одного предмета. Затем выполните расчёт. Это первое действие отделяет математический переход от случайно неясного описания ситуации. Для двух пересекающихся списков отдельно укажите число записей и число различных предметов, чтобы увидеть, к какому объекту относится каждый результат.

На втором листе замените обозначения, сохраняя значения: используйте другие буквы, слова или таблицу. Проверьте, изменился ли результат и можете ли вы объяснить каждый переход между записями. Затем измените одно условие самой задачи — допустите пересечение списков, неравные веса посылок или иной порядок распределения. Укажите, что теперь требует нового расчёта, а что относится к выбору описания или правила. Смена символа и смена предпосылки должны остаться двумя различимыми действиями.

Наконец, сформулируйте три коротких вопроса к своему примеру: что здесь существует независимо от записи, каким действием получается новое знание и какие сведения нужны для применения к реальным вещам? Сопоставьте их соответственно с прочитанными направлениями вопросов Платона, Канта и Милля, не приписывая каждому готового ответа на вашу ситуацию. Закончите одной точной фразой об области результата. Упражнение не разрешает спор об основаниях математики; оно делает ваш собственный следующий расчёт и философский вопрос более определёнными.

Ключевая цитата

> *«Без этого математика не может сделать ни одного шага»*

Иммануил Кант, «Пролегомены», §7, начальная клауза второго предложения до точки с запятой; «это» относится к чистому созерцанию. Собственный перевод с английской редакции Пола Каруса, третье издание 1912 года; не перевод с немецкого.

Связи между традициями

1. Абстрактное число: Платон ↔ Кант. В «Государстве» VII разговор о равных, неизменных единицах, постигаемых мыслью, направляет арифметику к умопостигаемому (фрагмент 199–203). В «Пролегоменах» §2c и §10 сложение и число объясняются через построение в чистом созерцании. Сравнение помогает отделить математический предмет от случайных видимых отметок. Но платоновское обращение к бытию и кантовское объяснение условий явления предлагают разные основания; общая тема не устанавливает единую доктрину.

2. Сложение расширяет знание: Кант ↔ Милль. Кант разбирает 7 + 5, для которого требуется последовательное присоединение единиц (§2c). Милль рассматривает два камня и один как опытно узнаваемую возможность перегруппировки той же совокупности («Логика», II VI §2). Оба возражают против сведения содержания расчёта к простому переименованию. Механизм сравнения — вопрос о том, откуда берётся основание нового перехода. Пальцы у Канта не превращают его объяснение необходимого знания в миллевскую индукцию из опыта.

3. Что представляет единица: Платон ↔ Милль. Платоновские единицы постигаются мыслью и сохраняют заданную равность («Государство» VII, 201–203). Милль настаивает, что числа относятся к вещам, хотя общие знаки позволяют не удерживать частные образы во время вычисления (II VI §2, 1936–1946). Сопоставление показывает два ответа на вопрос, что скрывается за одинаковой цифрой. Милль здесь не защищает взгляд «одни слова»; Платон не утверждает, что всякая физическая отметка сама является совершенной единицей.

4. Геометрия и применение: Кант ↔ Милль. Кант связывает геометрическое знание с пространством как формой явлений (§§10–12, замечание I). Милль различает надёжность вывода из предпосылок и необходимость отдельно исследовать их соответствие предмету (II VI §§1, 3–4). Общее затруднение — как обязательный вывод относится к чувственно данному. Решения различны: условия возможного явления у Канта и проверка допущений конкретного приложения у Милля. Один неточный чертёж не устанавливает истинность или ложность целой философии.

5. Польза и понимание: Платон ↔ Милль. Платон признаёт военную пользу математики, но не исчерпывает ею направленность знания («Государство» VII, 191–197, 214–225). Милль описывает перевод задачи из вещей в символы и обратный перевод результата (II VI §2, 1932–1946). Вместе эти места помогают спросить, что человек понимает помимо удобного вычисления: предмет исследования и смысл результата. Сравнение связывает образовательный и логический вопросы, сохраняя различие целей; оно не доказывает исторического влияния или единой программы обучения.

6. Представление не делает мир произвольным: Кант ↔ Милль. В замечании II к «Пролегоменам» Кант признаёт внешние вещи, отличая знание явлений от знания вещей самих по себе. Милль допускает выводы из предположений, но оставляет их фактическую истинность отдельному исследованию (II VI §4). Механизм — различение построенного описания и основания его предметной силы. Ни одно место не позволяет объявить физический мир вымыслом или считать всякую непротиворечивую модель одинаково подходящей к природе. Различие философских оснований сохраняется.

Первоисточники

Платон, «Государство», книга VII, перевод Бенджамина Джоуэтта. Использованы обсуждения арифметики и геометрии; образовательные утверждения не представлены современными эмпирическими результатами.

Иммануил Кант, «Пролегомены», английская редакция Пола Каруса, третье издание 1912. Использованы §2c, §§6–13 и замечания I–II; чистое созерцание рассматривается как философское понятие, не личное предчувствие.

Джон Стюарт Милль, «Система логики», восьмое издание, носитель Harper 1882. Использована книга II, глава VI, §§1–4; основания математики по Миллю представлены как его аргумент, а примеры учёта и моделей в статье созданы нами.

Теги

#математика, #философияматематики, #число, #единица, #арифметика, #геометрия, #сложение, #доказательство, #модель, #реальность, #язык, #символ, #нотация, #познание, #Платон, #Кант, #Милль, #созерцание, #опыт, #необходимость, #предпосылки, #применение, #окружность, #треугольник, #абстракция, #измерение, #счёт, #объективность, #конструирование, #открытие, #изобретение, #UnitedWisdom

Про авторов

Andrey Zarinsh — автор и основатель проекта United Wisdom. Исследует темы внутренней трансформации, единства традиций, межкультурного диалога и современной духовной дисциплины. Instagram: @andrey.zarinsh.

Maria Evilkut — соавтор United Wisdom. Помимо исследовательской работы, она стремится проверять эти идеи на практике и наблюдать, как принципы единства и взаимопонимания работают в реальной жизни между людьми и культурами. Instagram: @ilkutki.